Archimedes, der Kreis und die Kugel

Ungekürzte Fassung des Artikels von Markus Ruppert aus dem ML-Heft Nr. 165 (2011), S. 48-53.

Lerngruppe	10. Schuljahr
Idee	Volumenbestimmung der Kugel über Hebelgesetze und Vergleichskörper als Ausgangspunkt für experimentelles und rekursives Arbeiten, geometrisches Beweisen und Analogiebildung
Thema	Ebene Geometrie, Raumgeometrie
Zeitbedarf	Je nach gewähltem Aspekt 2-6 Stunden

"Gib mir einen Punkt, wo ich hintreten kann, und ich hebe dir die Erde aus den Angeln." Diese Aussage, die (nach Pappos) dem griechischen Gelehrten Archimedes (ca. 287-212 v. Chr.) zugeschrieben wird, dient als Grundlage für den unten (Abb. 1) abgebildeten Stich aus dem Mechanics Magazine (1824). Angedeutet wird hiermit einerseits die weltbewegende Bedeutung der Entdeckungen des Archimedes vor allem in den Bereichen der Mechanik und der Mathematik.

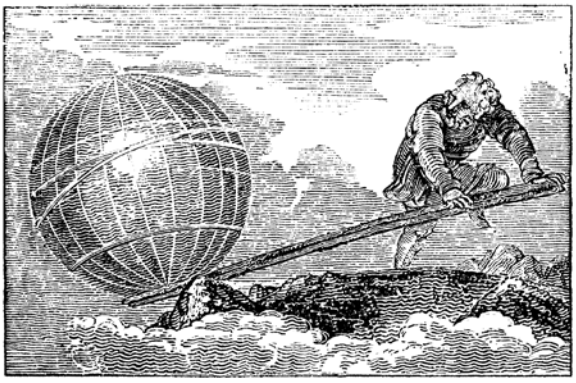


Abb. 1: Die mechanische Methode des Archimedes

Andererseits veranschaulicht diese Abbildung auch eine Art und Weise der mathematischen Hypothesengenerierung, wie sie ganz typisch für das Vorgehen von Archimedes im Zusammenhang mit Flächen- und Volumenbetrachtungen ist. Zur Bestimmung von Flächen und Volumina gegebener Objekte sucht Archimedes nämlich stets Vergleichsobjekte bekannter Fläche oder bekannten Volumens, die mit dem gegebenen Objekt bezüglich eines geschickt gewählten Hebelarms im Gleichgewicht stehen. Archimedes selbst beschreibt diese Vorgehensweise in seiner *„Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen"* (vgl. Archimedes, 1983).

Im Rahmen des Mathematikunterrichts kann wohl selten Archimedes' gesamter Gedankengang etwa bei der Bestimmung von Kugelvolumen und -oberfläche im Detail nachvollzogen werden. Trotzdem können Teilaspekte der folgenden Ausführungen heraus gegriffen werden, um den Schülern die Besonderheit seiner Leistungen nahe zu bringen:

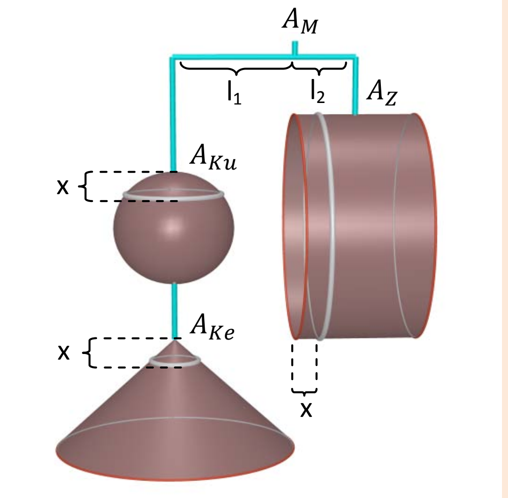
- Bei der Durchführung realer Wägeexperimente können die Schüler das Experiment als mögliche Quelle mathematischer Hypothesen kennen lernen. Anschließen sollte sich eine Diskussion über die Beweisbedürftigkeit der so gewonnenen Ergebnisse.
- Im Zusammenhang mit der Kreismessung durch einbeschriebene und umbeschriebene Polygone unter Zuhilfenahme eines Tabellenkalkulationsprogramms können rekursiv definierte Zusammenhänge und Grenzwertprozesse thematisiert werden.

- Die Volumen- und Oberflächenbestimmung der Kugel kann als Anlass genommen werden, um Analogieüberlegungen als wichtige heuristische Strategie zu thematisieren.
- Texte können aus dem Original in die heutige (Formel-)Sprache „übersetzt" und Beweise können am Originaltext nachvollzogen werden. Die im Mathematikunterricht oft vernachlässigte Arbeit mit Texten kann hier Ausgangspunkt einer Diskussion über die Vorteile der Formelsprache sein.[1]

Insgesamt bieten die Betrachtungen Archimedes' vielfältige Anknüpfungspunkte für einen Mathematikunterricht, der es den Schülern ermöglicht „mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen" (Winter, 2003).

Die mechanische Methode nach Archimedes

Bei seinen Ausführungen zum Kugelvolumen betrachtet Archimedes (auf etwas andere Weise) das nebenstehend abgebildete „Mobile".



Mobile zur Bestimmung des Kugelvolumens

Es besteht aus

- einer **Kugel** mit Radius r_{Ku},
- einem **Kegel** mit Grundflächenradius $r_{Ke} = 2r_{Ku}$ und Höhe $h_{Ke} = 2r_{Ku}$,
- einem **Zylinder** mit Grundflächenradius $r_Z = 2r_{Ku}$ und Höhe $h_Z = 2r_{Ku}$.

Die Hebelarme haben die Länge $l_1 = 2r_{Ku}$ und $l_2 = r_{Ku}$.

Archimedes zeigt, dass sich der Hebel im Gleichgewicht befindet. Er zerlegt dazu die beteiligten Körper gedanklich in dünne Kreisscheiben der gleichen Dicke Δx und findet zu je zwei waagrechten Kreisscheiben auf der linken Seite (die vom jeweiligen Aufhängepunkt der Kugel (A_{Ku}) bzw. des Kegels (A_{Ke}) den Abstand x haben) eine vertikale Kreisscheibe auf der rechten Seite (die von der Schwerlinie des Mobile-Aufhängepunktes A_M den Abstand x hat), so dass zwischen diesen Kreisscheiben ein Gleichgewicht herrscht. Archimedes wählt die jeweilige Grundfläche der Kreisscheiben als Maß für deren Volumen und damit als Maß für deren Gewichtskraft. In unserer modernen Formelsprache lassen sich die Überlegungen Archimedes' bezüglich der auftretenden Drehmomente (vgl. Hebelgesetze, Physikunterricht) leicht ausdrücken. Für das *linksdrehende Drehmoment* gilt:

$$\begin{aligned}
M_l &= F_{g,Ku}(x) \cdot l_1 + F_{g,Ke}(x) \cdot l_1 \\
&= m_{Ku}(x) g \cdot l_1 + m_{Ke}(x) g \cdot l_1 \\
&= g\rho V_{Ku}(x) \cdot l_1 + g\rho V_{Ke}(x) \cdot l_1 \\
&= g\rho \cdot \Delta x \cdot x^2 \pi \cdot l_1 + g\rho \cdot \Delta x \cdot (r_{Ku}^2 - (r_{Ku} - x)^2)\, \pi_{Ke} \cdot l_1 \\
&= g\rho\Delta x \cdot [x^2\pi \cdot 2r_{Ku} + (r_{Ku}^2 - (r_{Ku} - x)^2)\, \pi \cdot 2r_{Ku}] \\
&= 4r_{Ku}^2 x\pi g\rho\Delta x
\end{aligned}$$

[1] Eine Sammlung geeigneter Textpassagen und Arbeitsaufträge finden sich unter http://www.dmuw.de/materialien/ml165

Für das *rechtsdrehende Drehmoment* ergibt sich

$$M_r = g\rho\Delta x \cdot (2r_{Ku})^2\pi \cdot l_2(x) = 4r_{Ku}^2 x\pi g\rho\Delta x.$$

Dabei ist g die Erdbeschleunigung und ρ die Materialdichte (die natürlich für die beteiligten Körper als gleich angenommen wird). Die Bezeichnungen $F_{g,Ku}(x)$, $F_{g,Ke}(x)$, $m_{Ku}(x)$ u. s. w. beziehen sich jeweils auf Gewichtskraft, Masse, … der gedachten Kreisscheiben von Kugel bzw. Kegel an der Position x.

Es besteht also ein Drehmomentengleichgewicht. Da diese Argumentation für alle $x \in [0; 2r_{Ku}]$ gültig ist, sind die Körper insgesamt im Gleichgewicht.

Weiter ist der linke Hebelarm l_1 doppelt so lang wie der rechte Hebelarm l_2, so dass für die Volumina der beteiligten Körper im Umkehrschluss gilt:

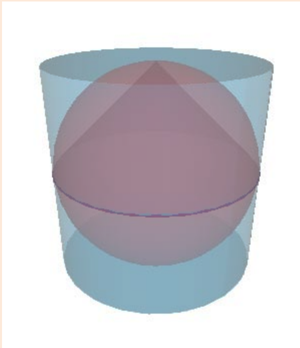
$$2(V_{Ku} + V_{Ke}) = V_Z.$$

Mit $V_{Ke} = \frac{1}{3}V_Z$, einem Zusammenhang der auch Archimedes bekannt war, ergibt sich schließlich[2]

$$V_{Ku} = \frac{1}{6}V_Z.$$

Um nun das Volumen der Kugel mit Körpern zu vergleichen, deren Maße direkt mit den Maßen der Kugel zusammenhängen, betrachtet Archimedes in einem weiteren Schritt (vgl. Abbildung):

- den **einbeschriebenen Kegel** mit einem Großkreis der Kugel als Grundfläche (also mit dem Grundflächenradius $\tilde{r}_{Ke} = r_{Ku}$) und der Höhe $\tilde{h}_{Ke} = r_{Ku}$, sowie
- den **umbeschriebenen Zylinder**, der ebenfalls einen Großkreis als Grundfläche besitzt (also $\tilde{r}_Z = r_{Ku}$) und die Höhe $\tilde{h}_Z = 2r_{Ku}$ hat.



Einbeschriebener Kegel und umbeschriebener Zylinder

Wegen $\tilde{V}_{Ke} = \frac{1}{8}V_{Ke}$ und $\tilde{V}_Z = \frac{1}{4}V_Z$ ergibt sich daraus durch Einsetzen:

> *„Der Inhalt der Kugel ist viermal so groß wie der eines Kegels, dessen Grundfläche gleich der Fläche des größten Kugelkreises und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.“*
> *(Archimedes: Kugel und Zylinder. I. Buch, §34).*

und

> *„ … jeder Zylinder, dessen Grundkreisradius gleich dem Radius der Kugel und dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Kugel ist, (ist)* $1\frac{1}{2}$*mal so groß wie die Kugel, …“*
> *(Archimedes: Kugel und Zylinder. I. Buch, Korollar zu §34).*

In Formeln also:

$$V_{Ku} = 4 \cdot \tilde{V}_{Ke} \qquad \text{und} \qquad \tilde{V}_Z = 1\frac{1}{2} \cdot V_{Ku}.$$

---

[2] Der Gedankengang, der Archimedes wahrscheinlich auf die ursprünglichen Vergleichskörper führte, wird sehr anschaulich von van der Waerden (1973, S. 7-8) dargestellt.

Auf den Schulunterricht bezogen schreibt Heinrich Winter (1989) über die mechanische Methode:

> *„An dieser Stelle wäre von Archimedes für den Unterricht zu lernen: praktische Wägungen durchführen und mit Hilfe des Einsatzes von Modellen von Kegel, Halbkugel und Zylinder zu Vermutungen über das Verhältnis der Volumina gelangen. Umschüttversuche mit Sand oder Wasser könnten diese Vermutung erhärten. Dabei würde das Denken in Verhältnissen betont (…). Nicht explizite Formeln werden (…) angestrebt, sondern ein Wissen darüber, wie sich Größen (…) verhalten." (S. 43)*

In den Lehrbüchern für den Mathematikunterricht findet sich Archimedes' Methode zur Bestimmung des Kugelvolumens in etwas abgewandelter Form wieder: Man vergleicht bestimmte Schnittflächen einer Kugel mit den Schnittflächen eines Vergleichskörpers (nämlich des umbeschriebenen Zylinders aus dem zwei einbeschriebene Kegel so entfernt wurden, dass deren Grundflächen mit Grund- bzw. Deckfläche des Zylinders zusammenfallen – (s. Abb. 2) und stellt fest, dass die Schnittflächen der beiden Körper auf jeder Höhe über der Grundfläche den gleichen Flächeninhalt besitzen.

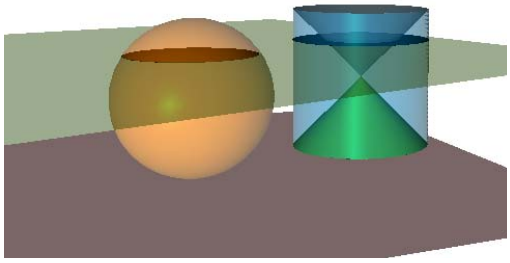


Abb. 2: Das Prinzip von Cavallieri zur Bestimmung des Kugelvolumens

Dann kommt das Prinzip von Cavalieri[3] (1598-1647) zum Tragen:

> *„Werden zwei Körper, die auf derselben Ebene stehen, von allen dazu parallelen Ebenen in gleich großen Flächen geschnitten, so haben diese Körper gleiches Volumen." (Fokus Mathematik 10, S.119)[4]*

Damit ist die Kugel zum Vergleichskörper volumengleich. Das ergibt sich auch aus den Betrachtungen von Archimedes, denn:

$$\tilde{V}_Z - 2\tilde{V}_{Ke} = 1\frac{1}{2}V_{Ku} - 2 \cdot \frac{1}{4}V_{Ku} = V_{Ku}$$

Bezüglich der Ausführungen von Archimedes drängen sich nun zwei Bemerkungen auf: Zum einen hat Archimedes das Prinzip von Cavalieri und damit einen grundlegenden Gedanken der Integralrechnung durch seine *„Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen"* (Archimedes, 1983) in gewissem Sinne vorweg genommen. Er hat – ebenso wie Cavallieri – eine Volumenbestimmung auf die Betrachtung der Schnittflächen von Vergleichskörpern zurückgeführt und daraus Rückschlüsse über die Volumina der beiden Körper gezogen (bei Cavallieri: Methode der Indivisiblen). Nachdem Archimedes' Methode allerdings erst nachträglich durch den Satz von Cavallieri legitimiert wurde, mussten die Ergebnisse von Archimedes noch bewiesen werden. Die herausragende Leistung Archimedes' war es, die Beweisbedürftigkeit seiner Vermutungen selbst zu erkennen. Er gibt sich in seinen Werken nicht mit den Plausibilitätserklärungen zufrieden, die das Ergebnis seiner mechanischen Be-

[3] Als Spezialfall des Satzes von Fubini wurde das Prinzip von Cavalieri selbst erst zu Beginn des 20. Jh. streng bewiesen.
[4] Im Original von Cavalieri 1635 in *Geometria indivisibilibis* veröffentlicht.

trachtungen waren, sondern führt den Beweis seiner Vermutungen anschließend rein geometrisch. Wesentliche Grundlage seines Beweises und Quelle wichtiger Ideen sind Analogieüberlegungen. Archimedes überträgt dabei Methoden und Erkenntnisse, die er selbst bei der Bestimmung von Flächeninhalt und Umfang des Kreises entwickelt und gesammelt hat, auf Volumen- und Oberflächenbestimmung der Kugel.

Bestimmung von Kreisfläche und Kreisumfang nach Archimedes

In seiner Schrift *Kreismessung* zeigt Archimedes zunächst in einem eleganten Beweis:

> *„Jeder Kreis ist einem rechtwinkligen Dreiecke inhaltsgleich, insofern der Radius gleich der einen der den rechten Winkel einschließenden Seiten, der Umfang aber gleich der Basis [gemeint ist: der anderen Kathete] ist." (Archimedes: Kreismessung. Abschnitt I, S.369)*

Beweis:
Angenommen die Fläche des Kreises A_K sei größer als die Fläche A_{Dreieck} des Dreiecks mit den geforderten Maßen. Dann gibt es (für genügend großes n) ein einbeschriebenes regelmäßiges n-Eck, dessen Flächeninhalt $A_{n\text{-Eck}}$ ebenfalls größer ist als der des Dreiecks. Der Umfang $n \cdot s_n$ des n-Ecks ist aber sicher kleiner als der Umfang U_K des Kreises und das Lot h_n vom Mittelpunkt des Kreises auf eine Seite des n-Ecks ist sicher kleiner als der Radius r_K des Kreises (vgl. Abb. 3). Damit gilt jedoch für den Flächeninhalt des n-Ecks:

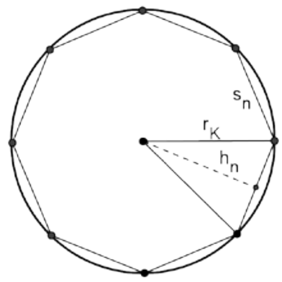


Abb. 3: Kreis mit einbeschriebenem n-Eck

$$A_{n\text{-Eck}} = n \cdot \frac{1}{2} s_n \cdot h_n < \frac{1}{2} U_K \cdot r_K = A_{\text{Dreieck}}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme – es kann also kein solches n-Eck geben.
Analog führt Archimedes die Annahme $A_K < A_{\text{Dreieck}}$ zum Widerspruch.

Es genügt also den Umfang U des Kreises zu bestimmen. Der Flächeninhalt ergibt sich dann zu

$$A = \frac{1}{2} U \cdot r.$$

Zur Bestimmung des Kreisumfangs betrachtet Archimedes ein- und umbeschriebene regelmäßige Polygone. Ausgehend von zwei regelmäßigen Sechsecken halbiert er wiederholt die zugehörigen Mittelpunktswinkel und erhält schließlich auf der Grundlage von ein- und umbeschriebenem 96-Eck die folgende Abschätzung:

> *„Der Umfang eines jeden Kreises ist dreimal so groß als der Durchmesser und noch um etwas größer, nämlich um weniger als ein Siebentel, aber um mehr als zehn Einundsiebenzigstel des Durchmessers." (Archimedes: Kreismessung. Abschnitt III, S.371)*

Es ergibt sich also:

$$3{,}14084507 \approx 3\frac{10}{71} < \pi = \frac{U}{d} < 3\frac{1}{7} \approx 3{,}142857143$$

Wie diese rekursive Vorgehensweise für die einbeschriebenen Vielecke mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms nachvollzogen werden kann, wird z. B. von Weigand und Weth (2002) beschrieben. Nimmt man, zusätzlich zu den Ausführungen von Weigand und Weth, auch die umbeschriebenen Vielecke mit in die Rekursion auf, so ergibt sich eine Intervallschachtelung für den Umfang des Kreises (und damit für π).

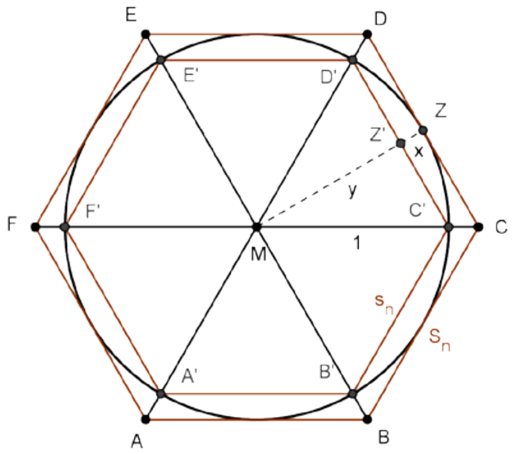


Abb. 4: Einbeschriebenes und umbeschriebenes Sechseck

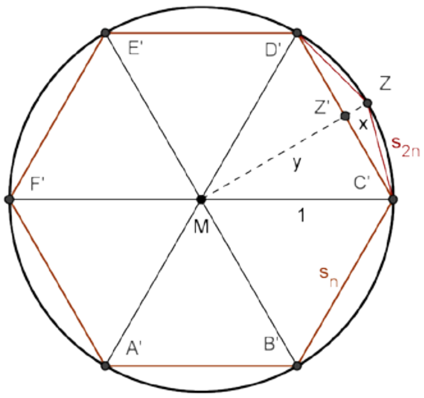


Abb. 5: Zusammenhang zwischen n-Eck und $2n$-Eck

Ausgehend von einem Kreis mit dem Radius $r = 1$ und von einem dem Kreis einbeschriebenen regulären n-Eck (mit der Seitenlänge s_n) lässt sich durch Betrachten der Strahlensatzfigur $MC'CZZ'$ und des rechtwinkligen Dreiecks $\Delta MC'Z'$ (in Abb. 4) zunächst die Seitenlänge S_n des umbeschriebenen n-Ecks in Abhängigkeit von s_n bestimmen:

Es gilt

$$\frac{S_n}{1} = \frac{s_n}{y} \qquad \Rightarrow \qquad S_n = \frac{s_n}{y} = \frac{s_n}{\sqrt{1-\left(\frac{s_n}{2}\right)^2}}$$

Außerdem können die Seitenlängen s_{2n} des einbeschriebenen $2n$-Ecks aus Abb. 5 rekursiv bestimmt werden. Es ergeben sich zunächst die Gleichungen:

(1) $\quad s_{2n}^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + x^2 \quad$ (rechtwinkliges Dreieck $\Delta C'ZZ'$)

(2) $\quad x = 1 - y = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2} \quad$ (rechtwinkliges Dreieck $\Delta MC'Z'$)

Einsetzen liefert:

$$s_{2n}^2 = \left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}\right)^2$$

und nach Umformung erhält man

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \qquad \text{bzw.} \qquad s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-s_n^2}}}$$

Die Umsetzung dieser Rekursion mit einem Tabellenkalkulationsprogramm liefert eine Näherung für π und ist zudem geeignet, Probleme mit rechnerinternen Rundungsungenauigkeiten beim Subtrahieren zu thematisieren (Subtraktionskatastrophe, vgl. Weigand/Weth, 2002).

Es ergeben sich, ausgehend von $n = 6$ folgende Werte:

n	s_n	S_n	u_n	U_n	π
6	1.0000000	1.1547005	6.0000000	6.9282032	3.0000000< π <3,4641016
12	0.5176381	0.5358984	6.2116571	6.4307806	3.1058286< π <3.2153903
24	0.2610524	0.2633050	6.2652572	6.3193199	3.1326286< π <3.1596600
48	0.1308063	0.1310869	6.2787004	6.2921724	3.1393502< π <3.1460862
96	0.0654382	0.0654732	6.2820639	6.2854292	3.1410320< π <3.1427146
192	0.0327235	0.0327278	6.2829049	6.2837461	3.1414525< π <3.1418731
384	0.0163623	0.0163628	6.2831152	6.2833255	3.1415576< π <3.1416628
768	0.0081812	0.0081813	6.2831678	6.2832204	3.1415839< π <3.1416102
1536	0.0040906	0.0040906	6.2831809	6.2831941	3.1415905< π <3.1415971

Tab. 1: Näherungswerte für den Kreisumfang

Dabei ist $u_n = n \cdot s_n$ der Umfang des einbeschriebenen und $U_n = n \cdot S_n$ der Umfang des umbeschriebenen Polygons.

Die Auswertung für $n = 96$ und der Vergleich mit obiger Abschätzung zeigt, dass Archimedes im Rahmen seiner Berechnungen nicht die exakten Werte für den Umfang der Polygone bestimmt hat, sondern weitere Näherungen verwendet hat.

Bestimmung von Kugelvolumen und Kugeloberfläche nach Archimedes

Zur Bestimmung von Volumen und Oberfläche einer Kugel bedient sich Archimedes in vielfältiger Weise geeigneter Analogien. Ausgehend von seinen Vermutungen, die er durch seine „mechanische Methode“ gewonnen hat, formuliert er die folgende Idee:

> *„Durch diesen Lehrsatz, daß eine Kugel viermal so groß ist als der Kegel, dessen Grundfläche der größte Kreis, die Höhe aber gleich dem Radius der Kugel, ist mir der Gedanke gekommen, daß die Oberfläche einer Kugel viermal so groß ist als ihr größter Kreis, indem ich von der Vorstellung ausging, daß, wie ein Kreis einem Dreieck gleich ist, dessen Grundlinie die Kreisperipherie, die Höhe aber dem Radius des Kreises gleich, ebenso ist die Kugel einem Kegel gleich, dessen Grundfläche die Oberfläche der Kugel, die Höhe aber dem Radius der Kugel gleich.“ (Archimedes: Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen. Abschnitt II, S.388)*

Die mechanische Methode zusammen mit der Analogie zum obigen Satz über den Flächeninhalt eines Kreises liefert ihm also eine Idee für die Oberfläche der Kugel.

Einerseits vermutet Archimedes nach der mechanischen Methode:

$$V_{Ku} = 4 \cdot V_{Ke} = 4 \cdot \frac{1}{3} A_{GK} \cdot r$$

(V_{Ku}: Volumen der Kugel, O_{Ku}: Oberfläche der Kugel, A_{GK}: Fläche eines Großkreises der Kugel, r: Radius der Kugel)

Andererseits liefert die Analogie:

$$V_{Ku} = \frac{1}{3} O_{Ku} \cdot r$$

Gleichsetzen liefert die obige Vermutung:

$$O_{Ku} = 4 \cdot A_{GK}$$

Archimedes beweist die Gültigkeit der Analogie zwar nicht direkt, wie er es im Falle der Flächengleichheit von Kreis und entsprechendem Dreieck getan hat, aber die Vermutung an sich leitet ihn beim Beweis der Behauptung.

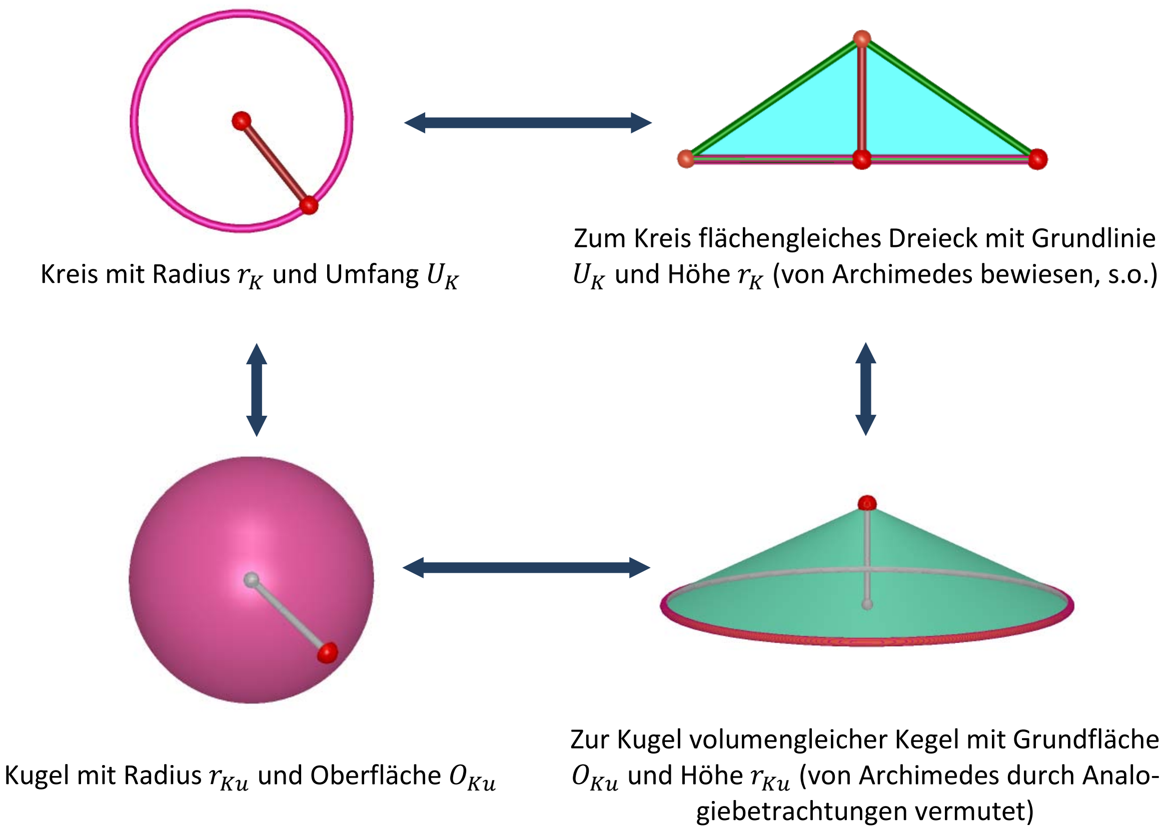


Abb. 6: Die Analogie zwischen Kreisfläche und Kugeloberfläche

Die Strategie, die Archimedes verfolgt, ist die gleiche wie bei den Kreisberechnungen. Er gibt zwei Körper an, einen der Kugel einbeschriebenen Körper und einen Körper, der die Kugel einschließt. Bei der Auswahl der infrage kommenden Körper lässt sich Archimedes wiederum von Analogieüberlegungen leiten. Die naheliegende Analogie zu den regelmäßigen Sehnen- bzw. Tangentenvielecken bei der Approximation des Kreises wäre eine Annäherung der Kugel durch regelmäßige Polyeder – dass es nur fünf bis auf Ähnlichkeit verschiede solcher Körper gibt (die Platonischen Körper, Platon ca. 428 v. Chr. bis 348 v. Chr.), war jedoch auch Archimedes bereits bekannt und van der Waerden (1973, S. 13) schreibt: „(…) es ist nicht leicht, eine gesetzmäßig fortschreitende Folge von unregelmäßigen Polyedern zu konstruieren, die die Kugel von innen und außen beliebig nahe approximieren". Deshalb wählt Archimedes einen anderen Weg der Analogiebildung: Er betrachtet Rotationskörper, die durch Rotation von regelmäßigen Polygonen, die Großkreisen der Kugel ein- bzw. umbeschrieben sind, um einen Durchmesser der Kugel, entstehen. Die entstandenen Körper sind aus Kegelstümpfen aufgebaut (vgl. Abb. 7).

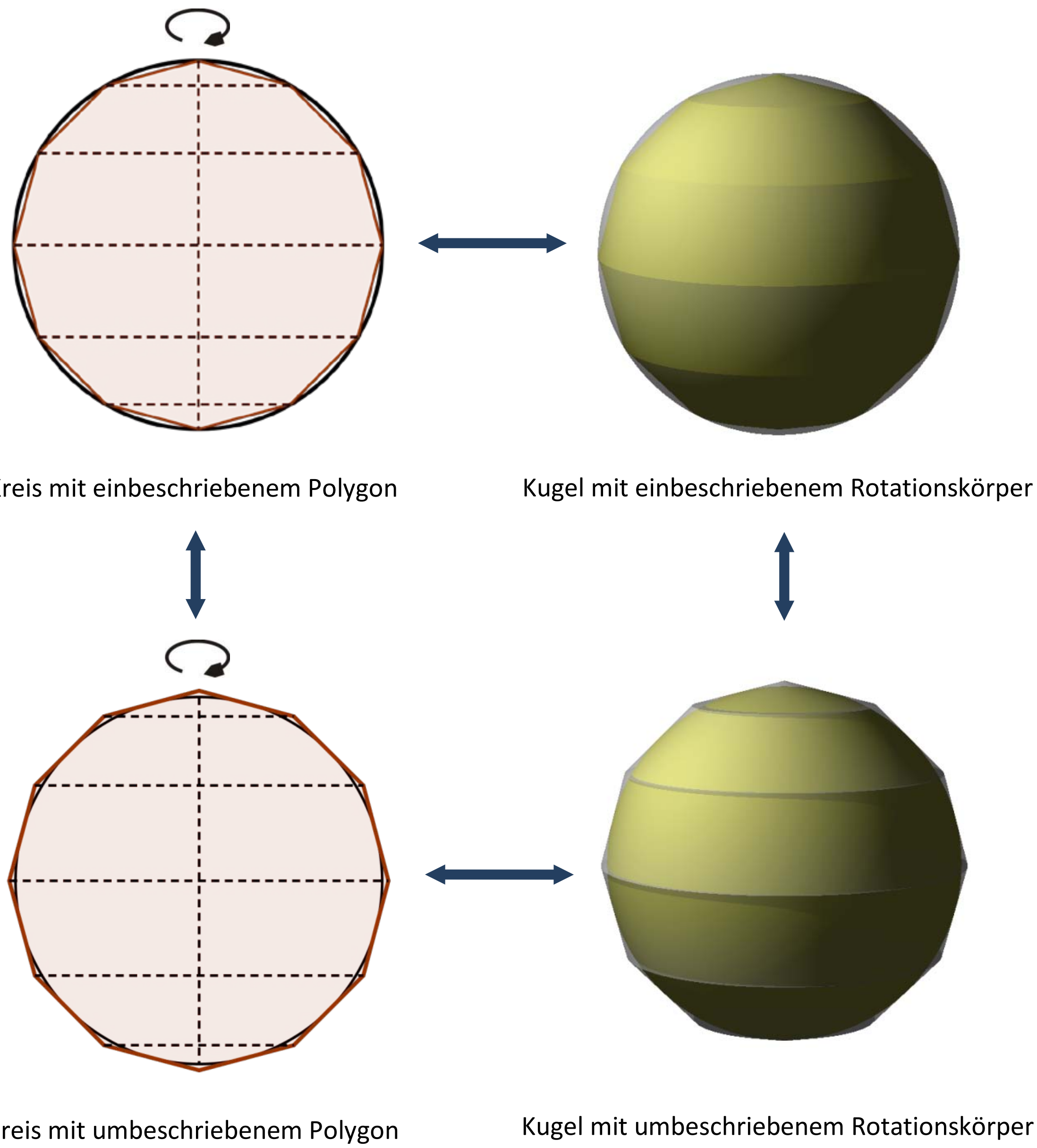


Abb. 7: Analogie zwischen Polygon und Rotationskörper bei der Berechnung von Kugelvolumen und -oberfläche

Zur Berechnung der Kugeloberfläche geht Archimedes in vier Schritten vor:

(1) Er zeigt, dass die Oberfläche des einbeschriebenen Körpers kleiner ist als die Kugeloberfläche und dass die Fläche des umbeschriebenen Körpers größer ist als die Kugeloberfläche.

Diese Behauptung folgt aus einem der fünf Postulate, die Archimedes seinen Betrachtungen zu Kreis und Zylinder voranstellt. Er schreibt:

> *„4. Die (…) Flächen aber, die dieselbe ebene Grenzkurve haben, sind ungleich, wenn sie nach derselben Seite konkav sind und die eine Fläche von der anderen und der Ebene, in der die Grenzkurve liegt, ganz eingeschlossen wird oder teilweise eigeschlossen wird, teilweise mit einer dieser Flächen identisch ist. Und zwar ist die eingeschlossene Fläche die kleinere."*
> *(Archimedes: Kugel und Zylinder. I. Buch, Postulate)*

Betrachtet man geeignete Berührkreise der Kugel mit dem ein- bzw. umbeschriebenen Rotationskörper als gemeinsame ebene Grundfläche, so folgt die Behauptung direkt aus dem genannten Postulat.

(2) Er drückt den Flächeninhalt der Mantelfläche eines Kegelstumpfs als Kreisfläche aus.

Durch Ein-und Umbeschreiben von Pyramiden in und um einen Kegel gelingt es Archimedes zunächst die Mantelfläche eines Kegels durch eine Kreisfläche auszudrücken. Da sich die Mantelfläche eines Kegelstumpfs als Differenz zweier Kegelflächen ausdrücken lässt, kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras (Kreisflächen sind ja proportional zu den Quadraten ihrer Radien) auch die Mantelfläche des Kegelstumpfs als Kreisfläche ausgedrückt werden. Archimedes formuliert dies wie folgt:

> *„Wenn ein gerader Kegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird, so ist das Stück des Kegelmantels, das zwischen den parallelen Ebenen liegt, gleich der Fläche eines Kreises, dessen Radius die mittlere Proportionale (das geometrische Mittel) ist zwischen dem Stück der Seitenlinie, das zwischen den parallelen Ebenen liegt und der Summe der Radien des Grundkreises und des Schnittkreises."*
> *(Archimedes: Kugel und Zylinder. I. Buch, §16)*

Übersetzt in die Formelsprache lässt sich die Mantelfläche des Kegelstumpfs folgendermaßen als Kreisfläche ausdrücken:

$$A_{KS} = t^2\pi$$

wobei für t gilt:

$$t = \sqrt{(r_1 + r_2) \cdot s}$$

Dabei sind r_1 bzw. r_2 Grund- bzw. Deckflächenradius und s die Mantellinie des Kegelstumpfs. Damit ergibt sich die bekannte Formel für die Mantelfläche des Kegelstumpfs durch Einsetzen:

$$M_{KS} = (r_1 + r_2) \cdot s\pi$$

(3) Er zeigt, dass die Oberfläche des einbeschriebenen Körpers kleiner ist und dass die Oberfläche des umbeschriebenen Körpers größer ist als viermal die Fläche eines Großkreises der Kugel.

Zunächst bestimmt er dazu die Oberfläche des einbeschriebenen Rotationskörpers und drückt diese als Rechtecksfläche aus. An dieser Stelle soll anhand der Schnittfigur (Abb. 8, links) und unter Benutzung der obigen Formel argumentiert werden.

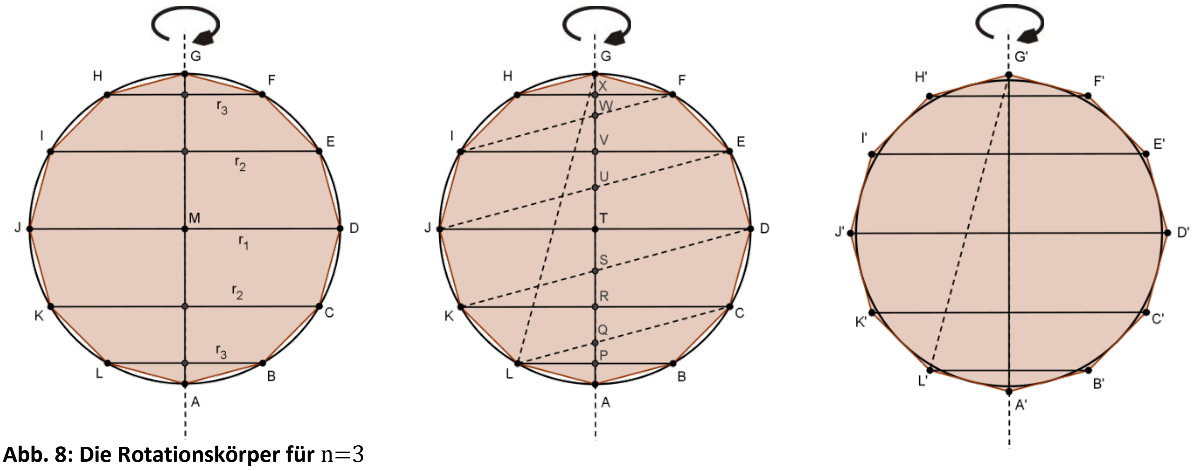


Abb. 8: Die Rotationskörper für $n{=}3$

Der Gedankengang von Archimedes bleibt dabei erhalten, wenngleich er natürlich keine Formelsprache benutzt. Die Oberfläche für die Rotationsfigur, die aus dem $4n$-Eck entstanden ist, setzt sich zusammen aus $2n$ Kegelstümpfen, von denen jeder zweimal vorkommt. Die Mantellinie ist bei jedem der Kegelstümpfe gleich der Seitenlänge s_{4n} des $4n$-Ecks. Es ergibt sich (mit der Abb. 8, links):

$$\begin{aligned} O_{RK,i}(n) &= 2 \cdot [(r_1 + r_2) \cdot s_{4n}\pi + (r_2 + r_3) \cdot s_{4n}\pi + \cdots + r_n \cdot s_{4n}\pi] \\ &= 2 \cdot (r_1 + 2r_2 + \cdots + 2r_n) \cdot s_{4n}\pi \end{aligned}$$

Für $n = 3$ ergibt sich also mit den Bezeichnungen aus Abb. 8:

$$O_{RK,i}(n) = (\overline{BL} + \overline{CK} + \overline{DJ} + \overline{EI} + \overline{FH}) \cdot s_{4n}\pi$$

Archimedes stellt also die Oberfläche des Rotationskörpers als (mit dem Faktor π multiplizierte) Fläche eines Rechtecks dar, dessen eine Seite die Polygonseite s_{4n} und dessen andere Seite die Summe aller eingezeichneten Polygondiagonalen ist. Um die obige Behauptung zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass diese Rechtecksfläche kleiner ist als das Quadrat über dem Kugeldurchmesser, denn dann gilt:

$$O_{RK,i}(n) = 2 \cdot (r_1 + 2r_2 + \cdots + 2r_n) \cdot s_{4n}\pi < d^2\pi = 4 \cdot r^2\pi$$

Dazu wandelt Archimedes die Fläche des Rechtecks, dessen eine Seite bei wachsendem n immer kleiner und die andere Seite gleichzeitig immer größer wird, in ein flächengleiches Rechteck um, dessen eine Seite (unabhängig von n) dem Kugeldurchmesser entspricht. Dazu betrachtet er die Abbildung 8 (Mitte) und argumentiert folgendermaßen: Die Dreiecke $\Delta ABP, \Delta PQL, \Delta QCR, \ldots, \Delta XGH$ sind alle zueinander ähnlich. Es gilt deshalb:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PL}} = \cdots = \frac{\overline{XG}}{\overline{XH}}$$

Für die Summe der jeweiligen Katheten ergibt sich für dieses Verhältnis entsprechend:

$$\frac{\overline{AP} + \overline{PQ} + \cdots + \overline{XG}}{\overline{PL} + \overline{PB} + \cdots + \overline{XH} + \overline{XF}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{BL} + \overline{CK} + \cdots + \overline{FH}}$$

Da auch das Dreieck ΔAGL zu den übrigen Dreiecken ähnlich ist gilt:

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{LG}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{BL} + \overline{CK} + \cdots + \overline{FH}} \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{AL} \cdot (\overline{BL} + \overline{CK} + \cdots + \overline{FH}) = \overline{AG} \cdot \overline{GL}$$

Damit lässt sich die obige Rechtecksfläche durch das Rechteck mit den Seiten $[AG]$ und $[GL]$ darstellen. Weiter gilt $\overline{AG} = d$ und $\overline{GL} < d$ (denn ΔAGL ist rechtwinklig) und damit $\overline{AG} \cdot \overline{GL} < d^2$. Da diese Argumentation für beliebiges n geführt werden kann, ist hiermit gezeigt, dass die Oberfläche des einbeschriebenen Rotationskörpers kleiner ist als $4r^2\pi$.

Fast vollkommen analog zeigt Archimedes, dass für die Oberfläche des umbeschriebenen Rotationskörpers der folgende Zusammenhang gilt (Abb. 8, rechts):

$$O_{RK,a}(n) = \overline{A'G'} \cdot \overline{G'L'} \cdot \pi > d^2\pi = 4r^2\pi$$

Man beachte dabei, dass $\overline{G'L'} = d$ und somit $\overline{A'G'} > d$ gilt. Auch hier ist die Argumentation unabhängig von n und die Behauptung über die umbeschriebene Rotationsfigur ist damit gezeigt.

Insgesamt gilt also:

$$O_{RK,i}(n) < 4r^2\pi < O_{RK,a}(n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(4) Er zeigt, dass die Oberflächendifferenz der Rotationskörper beliebig klein wird.

Archimedes zeigt dazu zunächst, dass sich die Oberflächen der Rotationskörper verhalten wie die Quadrate der Seitenlängen der erzeugenden Polygone und führt anschließend einen Widerspruchsbeweis, bei dem er zeigt, dass die Oberfläche der Kugel mit dem bis dahin gezeigten weder größer noch kleiner sein kann als viermal der Inhalt eines Großkreises.
Hier sollen, anders als bei Archimedes, die obigen Ergebnisse genutzt werden, um zu zeigen, dass die Oberflächendifferenz der Rotationskörper beliebig klein wird.

Nach (3) gilt für die Oberfläche der Rotationsfiguren:

$$M_{RK,i}(n) = \overline{AG} \cdot \overline{MG} \cdot \pi = 2r \cdot \sqrt{(2r)^2 - (s_n)^2} \cdot \pi = 4r^2\pi \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2r}\right)^2} \quad \text{und}$$

$$M_{RK,a}(n) = \overline{DZ} \cdot \overline{DF} \cdot \pi = 2r \cdot \sqrt{(2r)^2 + (S_n)^2} \cdot \pi = 4r^2\pi \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{S_n}{2r}\right)^2}$$

Beide Wurzelterme streben für wachsendes n jedoch offensichtlich von verschiedenen Seiten gegen 1 und deren Differenz gegen 0, so dass die Behauptung gezeigt und der Beweis für den Satz über die Oberfläche der Kugel erbracht ist.

Zum Beweis seiner Vermutung über das Kugelvolumen geht Archimedes ganz ähnlich vor. Er zeigt zunächst, dass sich das Volumen der einbeschriebenen (bzw. umbeschriebenen) Figur als Kegelvolumen darstellen lässt. Er schreibt:

> *„Der Inhalt der der Kugel einbeschriebenen (bzw. umbeschriebenen) von Kegelflächen begrenzten Figur ist gleich dem Inhalt eines Kegels, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche der der Kugel einbeschriebenen (bzw. umbeschriebenen) Figur ist, dessen Höhe aber gleich dem vom Mittelpunkt der Kugel auf einer Seite des Vielecks gefällten Lote (bzw. gleich dem Radius der Kugel)." (Archimedes: Kugel und Zylinder. I. Buch, §26 und §31)*

Mit obigen Beziehungen gilt also:

$$V_{RK,i}(n) = \frac{1}{3} \cdot M_{RK,i}(n) \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2} = \frac{4}{3} r^3 \pi \cdot \left(1 - \left(\frac{s_n}{2r}\right)^2\right) \qquad \text{und}$$

$$V_{RK,a}(n) = \frac{1}{3} \cdot M_{RK,a}(n) \cdot r = \frac{4}{3} r^3 \pi \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{s_n}{2r}\right)^2}$$

Archimedes zeigt weiter, analog zu seiner Vorgehensweise bei der Kugeloberfläche, dass das Volumen des einbeschriebenen Rotationskörpers stets kleiner und das Volumen des umbeschriebenen Rotationskörpers stets größer ist als viermal das Volumen eines Kegels, dessen Grundfläche ein Großkreis der Kugel und dessen Höhe der Kugelradius ist.

In einem letzten Schritt zeigt Archimedes schließlich, dass sich die Volumina der Rotationskörper verhalten wie die dritten Potenzen der Seitenlängen der erzeugenden Polygone und führt anschließend einen Widerspruchsbeweis, bei dem er zeigt, dass das Volumen der Kugel mit dem bis dahin gezeigten weder größer noch kleiner sein kann als viermal der besagte Kegel. Damit ist die Behauptung über das Kugelvolumen gezeigt.

Literatur

Archimedes (1983) *Archimedes Werke übersetzt von A. Czwalina.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt (4. Auflage).

Fokus Mathematik 10 Gymnasium Bayern (2008). Cornelsen, Berlin (Prüfauflage).

van der Waerden, B. L. (1973) Einfall und Überlegung. Birkhäuser Verlag, Basel (3. erw. Auflage).

Weigand, H.-G.; Weth, T. (2002) *Computer im Mathematikunterricht*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg / Berlin.

Winter, H. (1989) *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig / Wiesbaden.

Winter, H. (2003) *Mathematik und Allgemeinbildung*. In: Henn, Hans Wolfgang et al., Materialien für einen Realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Franzbecker, Hildesheim. S. 6-15.