

Lernziele im Mathematikunterricht

Inhaltsverzeichnis:

1. Richtziele des Mathematikunterrichts.....	1
2. Grobziele und Feinziele	3
3. Typen von Lernzielen.....	4
4. Operationalisierung von Lernzielen.....	6
Literatur.....	8

Lernziele für den Mathematikunterricht sollen zwei Fragen beantworten:

- Wozu wird Mathematikunterricht erteilt?
- Was soll durch den Mathematikunterricht erreicht werden?

Durch die Angabe von Lernzielen wird also einerseits der Mathematikunterricht gegenüber den Schülern und der Öffentlichkeit legitimiert und andererseits eine Ausrichtung des Mathematikunterrichts vorgegeben.

Die angeführten Fragen beziehen sich sowohl auf das Unterrichtsfach Mathematik insgesamt als auch auf einzelne Inhalte des Mathematikunterrichts. Daher gibt es unterschiedliche Ebenen von Lernzielen. Wir begnügen uns hier mit der Unterscheidung von Richtzielen, Grobzielen und Feinzielen. Richtziele beschreiben Aufgabe und Ausrichtung des gesamten Mathematikunterrichts in einem bestimmten Schultyp, Grobziele beziehen sich auf eine Unterrichtssequenz zu einem bestimmten Thema und Feinziele auf eine Unterrichtseinheit.

1. Richtziele des Mathematikunterrichts

Die Schule soll zum einen den einzelnen Menschen fördern und ihn zum anderen auf die Anforderungen des Lebens in der Gesellschaft und des Arbeitslebens vorbereiten. Diese Aufgaben bestimmen die allgemeinen Bildungsziele und Lernziele der Schule. Aus einigen dieser Anforderungen ergeben sich auch Ziele für den Mathematikunterricht. Es lassen sich aber nicht alle Ziele des Mathematikunterrichts aus diesen allgemeinen Zielen der Schule direkt ableiten.

Mathematikunterricht und anderer Fachunterricht hat außerdem das Ziel, ein adäquates Bild vom jeweiligen Fach zu vermitteln. Es sollen also fachtypische Denk- und Arbeitsweisen vertraut gemacht werden. Abiturienten, die ein „mathemathikhaltiges“ Studium wählen, sollen im Gymnasium die notwendigen Voraussetzungen dafür erworben haben. Wer sich in Studium und Beruf nicht mehr mit Mathematik befasst, soll im Gymnasium eine angemessene Vorstellung davon gewonnen haben, womit sich Mathematiker beschäftigen und in welcher Weise. Dabei hängt die Beantwortung der Frage, was man als angemessene Vorstellung von der Mathematik betrachtet, davon ab, unter welchem Blickwinkel man die Mathematik sieht: Steht bei der Betrachtung der Mathematik als Wissenschaft die reine oder die angewandte Mathematik im Vordergrund? Sieht man die Mathematik als Hilfswissenschaft für andere Wissenschaften und für die Technik, für die sie Modelle und Verfahren liefert, oder als ein Fähigkeit des menschlichen Geistes, in abstrakten Denkgegenständen Strukturen zu entdecken und zu beschreiben?

Bei den Richtzielen des Mathematikunterrichts unterscheidet man einerseits **fächerübergreifende Ziele** und **allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts**. Zu vielen fächerübergreifenden Zielen kann der Mathematikunterricht einen besonderen Beitrag leisten. Dazu gehören beispielsweise die Fähigkeit logisch zu denken, die Kommunikationsfähigkeit und Fähigkeit zum sorgfältigen Gebrauch der Sprache, Kritikfähigkeit, Fähigkeit zum problemlösenden Denken und Anschauungsvermögen. Diese Ziele werden aber auch in anderen Fächern verfolgt. Die **allgemeinen Ziele des Mathematikunterrichts** sind die weitgehend an das Fach gebunden, beispielsweise die Fähigkeit, (einfachere) Umweltsituationen zu mathematisieren, die Fähigkeit, Möglichkeiten und Grenzen der Mathematik zu sehen, und schließlich auch Freude am Mathematiktreiben (vgl.: Zech, F, Grundkurs Mathematikdidaktik).

Auch zu den einzelnen Gebieten der Schulmathematik, Arithmetik, Geometrie, Algebra, Funktionenlehre und Stochastik, gibt es jeweils Sammlungen allgemeiner Ziele. Diese Ziele werden ausgehend von den grundlegenden Ideen des jeweiligen mathematischen Gebiets einerseits und der Relevanz des Gebiets für die Schüler andererseits entwickelt.

Kataloge der wesentlichen Ziele des Mathematikunterrichts sind von verschiedenen Mathematikdidaktikern aufgestellt worden. In den 70er Jahren des 20. Jahrhunderts hat H. Bigalke die folgenden sieben Lernziele zusammengestellt:

- „ 1. Förderung des wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens
2. Förderung des logischen Denkens
3. Förderung der Bereitschaft und Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen
4. Förderung geistiger Initiative, Phantasie und Kreativität
5. Förderung des Anschauungsvermögens
6. Förderung des sprachlichen Ausdrucksvermögens
7. Förderung der Fähigkeit, Mathematik anwenden zu können.“

(zitiert nach Wittmann, S. 47)

Sammlungen allgemeiner Ziele findet man auch häufig in den Vorbemerkungen und Fachbeschreibungen der Lehrpläne.

Aus dem Lehrplan für das bayerische Gymnasium von 1990:

„Ziel des Mathematikunterrichts ist es, die Schüler in die Welt der Mathematik einzuführen und ihnen die nötigen Kenntnisse und Arbeitsweisen zu vermitteln, um Zusammenhänge mathematisch erschließen zu können. Der Unterricht macht mit grundlegenden Ideen und Formen mathematischer Betrachtung und Tätigkeit vertraut. Die Schüler erfahren dabei eine intensive Schulung des Denkens: Die Entwicklung klarer Begriffe und Vorstellungen, eine folgerichtige Gedankenführung und systematisches Vorgehen sind typische Erfordernisse und Kennzeichen mathematischen Arbeitens. Entsprechende Fähigkeiten und Haltungen altersstufengemäß auszubilden ist eine durchgängige Aufgabe im Mathematikunterricht und bringt Gewinn über das mathematische Fachgebiet hinaus.“

Richtziele stehen in dem Ruf, vor allem Inhalt von Sonntagsreden zur Bildungspolitik zu sein, aber wenig mit dem konkreten Unterricht zu tun zu haben. Allerdings sollte man die Bedeutung dieser Ziele nicht unterschätzen: Sie sollen ein Unterrichtsfach nicht nur legitimieren, sie sollen auch richtungweisend für den Unterricht wirken. Die Kritik, die auf Grund der Untersuchungen TIMSS und PISA am deutschen Mathematikunterricht erhoben wird, besteht zu einem nicht geringen Teil gerade darin, dass so allgemeine Ziele wie die Fähigkeit, Mathematik zum Lösen von Problemen aus der Umwelt einzusetzen, kaum erreicht werden. Der Unterricht konzentriert sich zu stark auf das Einüben von Verfahren und verliert die übergeordneten Ziele aus dem Blick.

2. Grobziele und Feinziele

Die Richtziele des Mathematikunterrichts sind nicht an bestimmte mathematische Inhalte gebunden. Entsprechend ist es auch nicht möglich, aus den allgemeinen Zielen die Inhalte des Mathematikunterrichts vollständig abzuleiten. Die Grob- und Feinziele des Mathematikunterrichts beziehen sich immer auf bestimmte Inhalte. Lerninhalte sind aber keineswegs dasselbe wie Lernziele. Man kann zwar davon ausgehen, dass mit der Behandlung des Lerninhalts „Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen“ dass Ziel erreicht werden soll, dass die Schüler derartige Gleichungssysteme lösen können, aber dieses Ziel reicht nicht aus, um zu beschreiben, was der Unterricht zu diesem Thema bewirken soll.

In den aktuellen Lehrplänen werden nur noch die Lerninhalte und Grobziele der einzelnen Sequenzen genannt. Es ist also vorgegeben, was behandelt werden soll und worauf die Behandlung dieser Inhalte abzielen soll.

Aus dem Lehrplan für das bayerische Gymnasium von 1990 (8. Jahrgangsstufe):

„3 Lineare Gleichungssysteme

(ca. 14 Std.)

Bereits bei einfachen Problemstellungen sind oft mehrere Größen gesucht. Die Schüler sollen deshalb einen Einblick in das Arbeiten mit mehreren Unbekannten bekommen, lineare Gleichungssysteme kennenlernen und Sicherheit im Umgang mit dem Spezialfall von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten gewinnen.

- | | |
|---|---|
| - Systeme von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten; | Zahlenpaare als Elemente der Lösungsmenge, zeichnerische Interpretation; |
| - Beispiele für Systeme mit mehr als zwei Unbekannten | Gleichsetzverfahren, Einsetzverfahren, Additionsverfahren |
| - Textaufgaben | → (Ph: z. B. Mischungsaufgaben, Bewegungsaufgaben)
→ (V: Überholvorgänge, verantwortliches Verhalten im Verkehr) |

An diesem Auszug aus dem Lehrplan wird deutlich, dass Lehrern ein weiter Raum für Entscheidungen zu einzelnen Inhalten und Feinzielen bleibt.

Die Überlegungen gehen dabei in zwei Richtungen: Man sucht übergeordnete Ziele, also Grobziele und Richtziele zu deren Erreichung der Lerninhalt einen Beitrag leisten kann, stellt also den Bezug zu allgemeineren Zielen her. Andererseits legt man auch die **Feinziele** des Unterrichts zu diesem Thema fest, beschreibt also möglichst genau, was die Schüler durch den Unterricht lernen sollen.

Die Überlegungen betreffen nicht nur die Auswahl der Feinziele, sondern auch die Frage, wie Feinziele formuliert werden sollen. Kann man Typen von Lernzielen unterscheiden? Wie genau kann man Lernziele formulieren? Was ist bei Lernzielen eine genaue Formulierung?

Für die Beantwortung dieser Fragen ist maßgeblich, was man unter „Lernen“ insbesondere „dem Lernen von Mathematik“ versteht.

3. Typen von Lernzielen

Die folgenden Anforderungen unterscheiden sich nicht nur in ihrer Schwierigkeit, die beschriebenen Fähigkeiten sind offensichtlich auch von unterschiedlicher Qualität:

- den Begriff „Variable“ erklären können;
- wissen, dass ein System linearer Gleichungen mit zwei Variablen genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen haben kann;
- begründen können, warum ein System linearer Gleichungen mit zwei Variablen genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen haben kann;
- ein System linearer Gleichungen mit zwei Variablen mit Hilfe des Additionsverfahrens lösen können;
- den Schnittpunkt zweier Geraden einer Ebene rechnerisch bestimmen können;
- zu einer Bewegungsaufgabe ein entsprechendes System linearer Gleichungen angeben können;
- zu einer bestimmen Angabe eines linearen Gleichungssystems ein günstiges Lösungsverfahren angeben können.

Um die unterschiedlichen Qualitäten von Lernzielen zu erfassen hat man Lernzieltaxonomien entwickelt. Eine der bekanntesten Lernzieltaxonomien ist die von B. S. Bloom. Er unterscheidet drei Lernzielbereiche, den kognitiven, den affektiven und den psychomotorischen Bereich. Für den Mathematikunterricht sind die Lernziele des kognitiven Bereichs von besonders großer Bedeutung. Hier unterscheidet Bloom sechs Kategorien:

1. **Wissen:** Kenntnis von Fakten und Verfahren.
2. **Verstehen:** Fähigkeit, Informationen sachgerecht aufzunehmen, in eine andere Form zu übertragen, zu interpretieren oder zu verallgemeinern.
3. **Anwenden:** Fähigkeit, von allgemeinen Regeln und Verfahren in speziellen Situationen Gebrauch zu machen.

4. **Analyse:** Fähigkeit, eine Information in Teile zu zerlegen, so dass die Beziehungen zwischen diesen Teilen bzw. die Organisation des Ganzen deutlich werden.
5. **Synthese:** Fähigkeit, Teile zu einem Ganzen zusammensetzen.
6. **Bewertung:** Fähigkeit, Urteile über den Wert von Materialien und Methoden abzugeben.

In der Anordnung der sechs Kategorien kann man eine gewisse Hierarchie erkennen: Eine Fähigkeit, die zu einer bestimmten Kategorie gehört, setzt Fähigkeiten vorhergehender Kategorien voraus. Man kann allerdings nicht behaupten, dass der Reihenfolge der Kategorien auch eine Stufung der Schwierigkeit der Lernziele entspricht: Das Anwenden des Additionsverfahrens auf ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen dürfte von den meisten Studierenden als einfacher empfunden werden als die Aufgabe, Erklärungen für die Begriffe „Variable“, „Gleichung“, „Gleichungssystem“, „Lösung“ und „Lösungsmenge“ anzugeben, obwohl hier nur Wissen über Grundbegriffe abgefragt wird.

In den curricularen Lehrplänen für bayerische Schulen der 70er Jahre des 20. Jahrhunderts wurden die Lernziele noch genauer vorgegeben. Es wurden vier Klassen von Zielen unterschieden - Wissen, Können, Erkennen und Werten - und jeweils drei Anforderungsstufen beschrieben, so dass aus den Lehrplänen hervorging, wie intensiv und mit welchen Schwerpunkten ein Thema zu bearbeiten war und welche Ergebnisse der Unterricht zeigen sollte:

Wissen (Informationen):

1. **Einblick** bzw. **Überblick** beschreiben eine erste Begegnung mit einem Wissensgebiet;
2. **Kenntnis** verlangt stärkere Differenzierung der Inhalte und Betonung der Zusammenhänge;
3. **Vertrautheit** bedeutet souveränes Verfügen über möglichst viele Teilinformationen und Zusammenhänge.

Können (Operationen, Verfahren):

1. **Fähigkeit** bezeichnet dasjenige Können, das zum Vollzug von Operationen oder Verfahren notwendig ist;
2. **Fertigkeit** verlangt eingeschliffenes, fast müheloses Können;
3. **Beherrschung** bedeutet souveränes Verfügen über die eingeübten Verfahrensmuster.

Erkennen (Probleme):

1. **Bewusstsein:** Die Problemlage wird in ihren wichtigen Aspekten erfasst;
2. **Einsicht:** Eine Lösung des Problems wird erfasst bzw. ausgearbeitet.
3. **Verständnis:** Eine Lösung des Problems wird überprüft und ggf. anerkannt.

Werten (Einstellungen):

1. **Offenheit, Interesse, Neigung, ...**
2. **Achtung, Freude, Bereitschaft, ...**
3. **Entschlossenheit ...**

In den neueren Lehrplänen fehlen solche Zielangaben. Beispielsweise geht aus dem oben genannten Lehrplanausschnitt zu den linearen Gleichungssystemen nicht hervor, ob die Schüler alle genannten Lösungsverfahren beherrschen sollen, oder ob es reicht, wenn sie die Fähigkeit besitzen mit einem Verfahren ihrer Wahl ein Gleichungssystem zu lösen.

4. Operationalisierung von Lernzielen

Auch die eben dargestellte Klassifizierung von Lernzielen kann man noch als zu wenig präzise betrachten. Es bleibt immer noch ein gewisser Ermessensspielraum, ob man das Können eines Schülers als Fähigkeit, Fertigkeit oder Beherrschung im oben beschriebenen Sinne einstuft. Durch Operationalisierung (R. F. Mager) von Lernzielen wird erreicht, dass man objektiv überprüfen kann, ob die Lernziele erreicht wurden. Zum einen sollen solche Ziele den Lernenden offen legen, was sie nach dem Unterricht können sollen, zum anderen wird der Lehrerfolg überprüfbar.

Die Operationalisierung von Lernzielen geht von der behavioristischen Definition des Lernens als Verhaltensänderung aus, die auf Erfahrung beruht. In Lernzielen muss also das **Verhalten** beschrieben werden, dass die Schüler nach der Erfahrung des Unterrichts zeigen (können) sollen. Damit objektiv entschieden werden kann, ob ein Schüler das gewünschte Verhalten zeigt, müssen die Lernzielformulierungen folgende Kriterien erfüllen:

1. Das angestrebte Verhalten muss **eindeutig** beschrieben werden.
2. Es muss genau angegeben werden, unter welchen **Voraussetzungen** und **Bedingungen** das Verhalten gezeigt werden muss.
3. Es muss ein **Beurteilungsmaßstab** angegeben werden für die Güte des Endverhaltens. (Insbesondere muss angegeben werden, welches Verhalten als noch akzeptabel gilt.)

Lernzieloperationalisierung verlangt von Lehrern, dass sie bei der Planung einer Unterrichtsstunde schon einen Test mit dem zugehörigen Notenschlüssel angeben können, den man die Schüler nach der betreffenden Unterrichtsstunde schreiben lassen könnte. Dazu müssen Lehrer die Fähigkeiten und Möglichkeiten ihrer Schüler sehr gut einschätzen können.

Andererseits interessiert man sich bei der Lernzieloperationalisierung nicht für Bewusstseinsprozesse sondern nur für beobachtbares Verhalten, das am Ende des Lernprozesses steht: Als Ziel wird nicht formuliert, dass Schüler eine Definition verstanden haben, sondern beispielsweise, dass sie die Definition schriftlich oder mündlich wiedergeben können, denn „Verständnis“ ist kein beobachtbares Verhalten. Natürlich sollen die Schüler die Definition auch verstanden haben. Um das in ein operationalisiertes Lernziel zu fassen, muss man ein Verhalten beschreiben, dass die Schüler nur dann zeigen können, wenn sie die Definition verstanden haben. Die Lernzieloperationalisierung stößt also nicht erst bei affektiven Lernzielen an Grenzen. Daher ist auch häufig kritisiert worden, dass die Lernzieloperationalisierung zu einer verkürzten Sichtweise des Unterrichts und des Lernens überhaupt führt.

In den letzten Jahren wurde statt des zu erzielenden Verhaltens der Schüler stärker die Frage in den Mittelpunkt gerückt, wie Schüler Mathematik im Unterricht erleben sollen. Dabei

wurde betont, dass Mathematik als Prozess, nicht als zu übernehmendes „Fertigprodukt“ erfahren werden soll.

„In der faszinierenden Begegnung zwischen Mensch und Mathematik und in der umsichtigen Organisation dieser Begegnung liegt der eigentliche Ursprung für mathematikdidaktisches Denken und Handeln.“ (WITTMANN 1992, S. 60)

Die Forderung, Mathematikunterricht so zu gestalten, dass eine „faszinierende Begegnung zwischen Mensch und Mathematik“ ermöglicht wird, betrifft die Unterrichtskultur und nicht messbare Ergebnisse des Unterrichts. Es wird also gar nicht angestrebt, diese Forderung in operationalisierte Lernziele umzusetzen.

Es ist zwar durchaus legitim, danach zu fragen, welche messbaren Lernerfolge Unterricht erreichen soll, und den tatsächlichen Erfolg des Unterrichts zu überprüfen, gleichwohl können operationalisierte Lernziele immer nur unvollständig beschreiben, was Unterricht leisten soll.

Die aktuelle Diskussion um verbindliche Standards im Bildungswesen, die durch die Ergebnisse der PISA-Studie angeregt wurde, hat neue Aufmerksamkeit auf die Operationalisierung gelenkt, denn die Standards sollen so formuliert werden, dass ihr Erreichen mit Tests überprüft werden kann. Andererseits haben gerade die internationalen Vergleiche des Unterrichts auch Forderungen nach sich gezogen, deutschen Mathematikunterricht offener zugestalten. Schulen und Lehrer sollen mehr Freiheit bei der Auswahl von Lerninhalten bekommen, Schüler sollen zu mehr selbständigem Lernen erzogen werden. Bei gleichzeitiger Vorgabe operationalisierter Lernziele besteht aber die Gefahr, dass neue Freiräume dazu genutzt werden, nach altem Muster die in den Standards beschriebenen Fähigkeiten zu trainieren, um für die Tests gerüstet zu sein.

Gedacht sind die Standards aber als Orientierungspunkte, die gerade im Zusammenhang mit größerer Freiheit der Schulen sinnvoll sind. So war im Deutschlandradio Berlin in dem Beitrag „Nationale Bildungsstandards sollen Lehrpläne ablösen - Expertenteam formuliert bundesweit gültige Bildungsziele“ von Jacqueline Boysen (in der Reihe „Fazit – Kultur vom Tage gesendet am 18.02.2003) 0folgendes zu hören:

„Die druckfrische »Expertise zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards« bestätigt deren Auftraggeberin, Bundesbildungsministerin Edelgard Bulmahn, dringend bundesweit gültige Bildungsziele zu formulieren. Liegen erst einmal Kriterien auf dem Tisch, so könne auch der Lern- und Lehrerfolg präzise gemessen, beurteilt und gegebenenfalls optimiert werden – so die Erwartung der sozialdemokratischen Ministerin:

»Wir haben in Deutschland eine Tradition einer Input-Steuerung. Mit dieser Tradition müssen wir brechen und uns an dem orientieren, was die erfolgreichen Bildungsstaaten uns zeigen, dass es wesentlich darauf ankommt und entscheidend ist, dass wir die gewünschten Ergebnisse des Lernens und Lehrens präzise beschreiben und prüfen, ob diese Ziele erreicht worden sind oder nicht, um damit dann einen Prozess der Qualitätsverbesserung in Gang setzen zu können.«

Fünf Monate hat eine Expertengruppe unter dem Dach des Deutschen Instituts für Internationale Pädagogische Forschung in Frankfurt am Main an der Expertise gearbeitet, um einen theoretischen Rahmen für die künftigen Bildungsstandards für deutsche Schulen zu entwickeln. Diese Bildungsstandards – vorgesehen sind Kriterien für Minimalleistungen – sollen in erster Linie die Orientierung erleichtern, erläutert der Bildungsforscher Eckhard Klieme, unter dessen Federführung die Studie entstanden ist:

»Bildungsstandards helfen allen, klar zu sehen, worauf es im Kern ankommt. Das bedeutet für die Lehrkräfte an den Schulen, dass sie eine Orientierung haben, aber auch für Eltern und Schüler, dass sie eine Grundlage haben für ein Gespräch mit den Lehrern. Es wird also damit der Kern des Bildungswesens transparent. D.h. wir standardisieren nicht sondern lassen einen Freiraum. Das ist die erste Funktion. Die zweite ist die Rückmeldung: Das Ziel ist hier umzusetzen in Aufgaben und letztendlich in Tests, die dann verwendet werden um festzustellen, wie weit Schülerinnen und Schüler gekommen sind und auch Schulen eine Rückmeldung zu geben darüber, wie weit sie kommen.«"

Das Zitat wurde übernommen aus der Internetseite <http://www.dradio.de/cgi-bin/es/neufazit/1539.html>, Stand 24.02.03)

Literatur

Lehrpläne

WITTMANN, E. C.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig (Vieweg) 1981⁶.

WITTMANN, E. C.: *Mathematikdidaktik als „design science“*. In: Journal für Mathematik-Didaktik 13 (1992) 1, S. 55-70.

ZECH, F.: *Grundkurs Mathematikdidaktik*. Weinheim (Beltz) 1998⁹.